

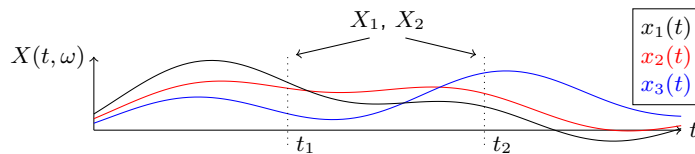
# Signaux Aléatoires

## Signaux aléatoires

R. Flamary

7 décembre 2015

### Signal aléatoire



#### Définition

Un signal aléatoire temporel est une fonction de deux variables. L'un des variables prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , l'autre étant la réalisation d'une variable aléatoire :

$$X(\underbrace{t}_{\text{temps}}, \underbrace{w}_{\text{v. a.}}) \quad (1)$$

- ▶ À  $t = t_i$  fixé,  $X(t_i, w) = X_i = X_i(w)$  est une variable aléatoire ;
- ▶ Pour  $w = w_i$  fixé,  $X(t, w_i) = x_i(t)$  est un signal temporel ;
- ▶ Si  $X$  est à temps discret, on parle alors de *processus aléatoire*. ( $n \in \mathbb{N}$  à la place de  $t \in \mathbb{R}$ )

## Plan du cours

### Introduction

#### Signaux aléatoires

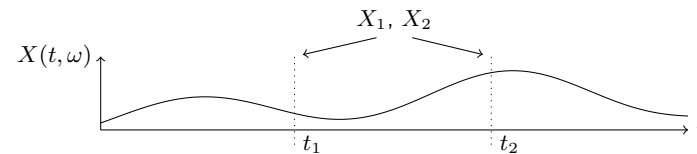
- Définitions
- Description d'un signal aléatoire
  - Description complète
  - Description à un et deux instants
- Stationnarité
  - Stationnarité stricte
  - Stationnarité au sens faible
- Ergodicité
- Corrélation et inter-corrélation

#### Exemples de signaux aléatoires

#### Propriétés spectrales des signaux stationnaires

2 / 16

### Description d'un signal aléatoire



#### Description complète

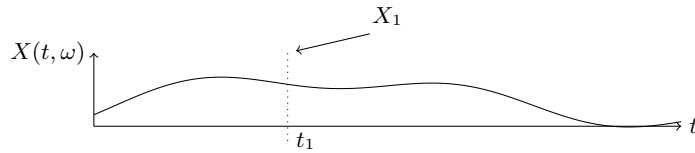
Le signal aléatoire  $X(t, w)$  est connu si  $\forall t_1, t_2, \dots, t_k$  et  $\forall k$ , on connaît la loi jointe :

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) \quad (2)$$

où  $X_1, \dots, X_k$  sont les variables aléatoires associées aux  $k$  instants.

- ▶ Ceci suppose que l'on connaisse toutes les relation probabilistes entre tous les échantillons temporels.
  - ▶ Souvent impossible en pratique.
- ⇒ Descriptions partielles

## Description à un instant



### Définition

On connaît  $X(t, w)$  à un instant si  $\forall t_1$  on connaît la loi de  $X(t_1, w)$ , c'est à dire de la variable aléatoire  $X_1$  à l'instant  $t_1$ .

### Moments

- Soit le moment d'ordre 1, c'est à dire la moyenne (l'espérance de la variable aléatoire  $X_1$ ) :

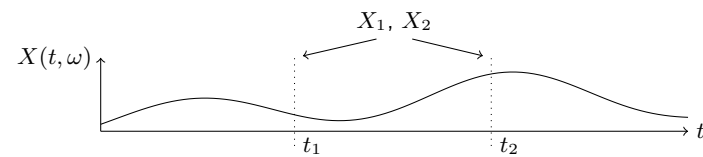
$$m_X(t_1) = E(X(t_1, w)) = \int x_1 p_{X_1}(x_1) dx_1 \quad (3)$$

- On définit également le moment d'ordre  $n$

$$m_X^{(n)}(t_1) = E(X(t_1, w)^n) = \int x_1^n p_{X_1}(x_1) dx_1 \quad (4)$$

5 / 16

## Description à deux instants (1)



### Définition

On connaît  $X(t, w)$  à deux instants si  $\forall t_1, t_2$  on connaît la loi conjointe des v.a.  $X(t_1, w)$  et  $X(t_2, w)$  :

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \text{ est connue } \forall t_1, t_2$$

### Corrélation entre deux instants

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1, w)X^*(t_2, w)) = \int \int x_1 x_2^* p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

### Covariance entre deux instants

$$C_X(t_1, t_2) = E((X(t_1, w) - m_X(t_1))(X^*(t_2, w) - m_X(t_2))) \quad (6)$$

6 / 16

## Description à deux instants (2)

### Remarques

- $X_c(t, w) = X(t, w) - m_X(t)$  est le signal centré.
- Corrélation et covariance sont des caractérisations à l'ordre 2.

### Indépendances entre $X_1$ et $X_2$

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \quad (7)$$

- La corrélation devient :

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1, w)X^*(t_2, w)) = E(X(t_1, w))E(X^*(t_2, w)) = m_X(t_1)m_X(t_2)$$

- Si signal centré, alors  $R_X(t_1, t_2) = 0$  pour  $t_1 \neq t_2$ . Ce type de signal aléatoire est appelé *bruit blanc* au sens large.

7 / 16

## Stationnarité

### Définition

On dit qu'un signal aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.

### Stricte stationnarité

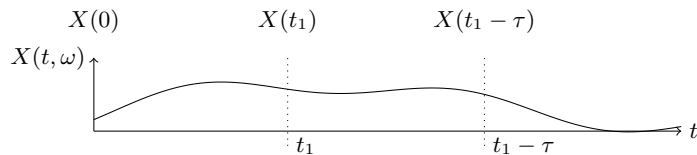
Lorsque le signal aléatoire est connu la stationnarité stricte se traduit par

$$p_{X(t_1), \dots, X(t_k)} = p_{X(t_1 - \tau), \dots, X(t_k - \tau)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

- Pour alléger les notations on définit  $X(t_1) = X(t_1, w) = X_1$ .
- La corrélation  $R_X(t_1, t_2)$  ne dépend alors plus que de l'écart  $t_1 - t_2$ .
- La stationnarité simplifie énormément l'étude d'un signal aléatoire.
- Stricte stationnarité difficile à vérifier en pratique.
- ⇒ Stationnarité au sens faible.

8 / 16

## Stationnarité au sens faible (1)



Stationnarité pour la description à un instant

$$p_{X(t_1)} = p_{X(t_1 - \tau)} = p_{X(0)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (9)$$

- ▶ Toutes les variables aléatoires  $X(t)$  suivent la même loi  $\forall t \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Les moments

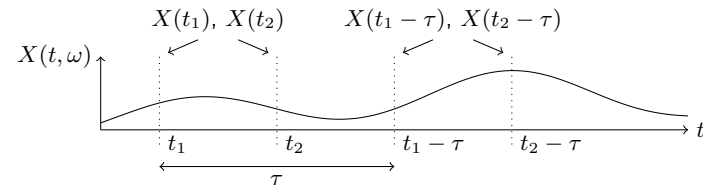
$$E(X(t_1)^n) = E(X(t_1 - \tau)^n) = m_X^{(n)}(t) = m_X^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

sont constants et indépendants du temps.

- ▶ On dit que le signal est stationnaire à l'ordre 1 si le moment d'ordre 1 est indépendant du temps.

9 / 16

## Stationnarité au sens faible (2)



Stationnarité pour la description à deux instants

La distribution conjointe ne dépend plus que de l'écart entre les deux instants

$$p_{X(t_1), X(t_2)} = p_{X(t_1 - \tau), X(t_2 - \tau)} = p_{X(t_1 - t_2), X(0)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (11)$$

- ▶ La corrélation devient donc

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X^*(t_2)) = E(X(t_1 - t_2)X^*(0)) = E(X(t)X^*(t - \tau)) \quad (12)$$

- ▶ On définit la fonction d'autocorrélation comme

$$R_X(\tau) = E(X(t)X^*(t - \tau)) \quad (13)$$

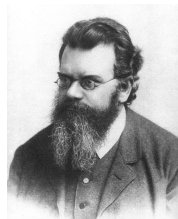
- ▶ On dit que le signal est stationnaire à l'ordre 2 si il est stationnaire à l'ordre 1 et que la fonction de corrélation est invariante par translation temporelle.

10 / 16

## Ergodicité

### Processus ergodique

- ▶ Processus stochastique dont les statistiques peuvent être approchées par l'étude d'une seule réalisation suffisamment longue.
- ▶ Hypothèse non vérifiable en pratique, ce sera pour nous un postulat.
- ▶ Elle a été formulée par Boltzmann pour sa théorie cinétique des gaz.



### Moyenne temporelle

La moyenne temporelle (ordre n) d'un signal  $x(t)$  est définie par

$$\overline{x^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{|T|} x(t)^n dt \quad (14)$$

La moyenne temporelle d'ordre 2 est la puissance du signal.

11 / 16

## Ergodicité (2)

### Moyenne temporelle d'un signal aléatoire

$$\overline{X(t, w)^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{|T|} X(t, w)^n dt \quad (15)$$

Dans le cas général, cette moyenne est une variable aléatoire dont les réalisations sont  $\overline{x_i^n}$  pour une réalisation  $x_i(t)$ .

### Moyenne temporelle croisée

$$\overline{X(t, w)X(t - \tau, w)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{|T|} X(t, w)X(t - \tau, w) dt \quad (16)$$

### Définition de l'ergodicité

Le signal  $X(t, w)$  est dit ergodique si les moyennes temporelles sont des nombres certains (pas aléatoires).

Cette propriété entraîne

$$\overline{X(t, w)^n} = \overline{x_i^n} = \overline{x^n}, \forall \text{ la réalisation } w_i$$

12 / 16

## Signaux stationnaires et ergodiques

- ▶ L'ergodicité permet de calculer une espérance mathématique en effectuant une moyenne temporelle.
- ▶ Au premier ordre, les moyennes d'ensembles et temporelles sont égales :

$$\overline{x_i^n} = \overline{E\overline{X(t, w)^n}} = E(X(t, w)^n) = m_X^{(n)} \quad (17)$$

- ▶ Important en pratique car plusieurs réalisations d'un signal sont rares.
- ▶ On mesure des signaux temporels longs pour **estimer** leur moyennes, variance, covariance.
- ▶ Pour un signal stationnaire au second ordre et ergodique :

$$R_X(\tau) = E(X(t)X^*(t - \tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{|T|}^{T/2} X(t, w)X^*(t - \tau, w) dt \quad (18)$$

La corrélation du signal avec lui-même s'appelle également auto-corrélation.

13 / 16

## Propriétés de la corrélation

$X(t, w)$  signal aléatoire stationnaire.

### Parité

$$R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \quad (21)$$

### Centrage

$$R_X(\tau) = R_{X_c}(\tau) + m_X^2 \quad (22)$$

### Puissance

$$P_X = R_X(0) \quad (23)$$

Par définition  $R_X(0) > 0$

### Non-négativité

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j R_X(\tau_i - \tau_j) \geq 0, \quad \forall i, j \quad (24)$$

### Coefficient de corrélation

$$\rho(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} \quad (25)$$

### Mémoire

Processus à mémoire finie :

$\exists T_{max}$  tel que  $\rho(t) = 0$  pour  $|t| > T_{max}$

15 / 16

## Corrélation et intercorrélation

### Rappels

Pour des signaux aléatoires stationnaires et ergodiques  $X(t, w)$  et  $Y(t, w)$ .

#### ▶ Corrélation ou auto-corrélation

$$R_X(\tau) = R_{XX}(\tau) = E(X(t, w)X^*(t - \tau, w)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} X(t, w)X^*(t - \tau, w) dt \quad (19)$$

Mesure une relation linéaire entre deux instants d'un signal.

#### ▶ Inter-corrélation

$$R_{XY}(\tau) = E(X(t, w)Y^*(t - \tau, w)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} X(t, w)Y^*(t - \tau, w) dt \quad (20)$$

Permet de quantifier les relations linéaires existantes entre deux signaux aléatoires en fonction d'un déphasage.

- ▶ La corrélation et l'inter-corrélation ont un certain nombre de propriétés utiles pour les calculs.

14 / 16

## Propriétés de l'inter-corrélation

$X(t, w)$  et  $Y(t, w)$  signaux aléatoire stationnaires.

### Symétrie Hermitienne

$$R_{XY}(\tau) = R_{X^*Y^*}^*(-\tau) \quad (26)$$

### Maximum

On peut utiliser l'inégalité de Schwartz pour montrer que

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_{XX}(0) * R_{YY}(0) \quad (27)$$

et donc

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0) \quad (28)$$

L'auto-corrélation est maximale en 0

16 / 16