

# Signaux Aléatoires

## Exemples de signaux aléatoires

R. Flamary

7 décembre 2015

## Séries usuelles

- Série Géométrique

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{pour } |x| < 1$$

- Exponentielle

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x$$

- Trigonométriques

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \forall x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \forall x$$

- Hyperboliques

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \text{for all } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{for all } x$$

## Plan du cours

### Introduction

### Signaux aléatoires

#### Exemples de signaux aléatoires

##### Processus de Poisson

- Loi de Poisson
- Propriétés du processus de Poisson
- Exemple de réalisations

##### Basculateur poissonnien

- Définition
- Propriétés du basculateur poissonnien
- Exemple de réalisations

##### Marche aléatoire

- Définition
- Propriétés de la marche aléatoire
- Exemple de réalisations

##### Signaux Gaussiens

- Définition
- Propriétés et cas particuliers
- Exemple de réalisations

### Propriétés spectrales des signaux stationnaires

2 / 28

## Loi de Poisson

### Rappel loi de Poisson

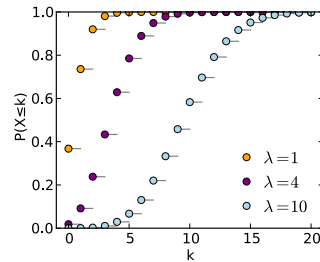
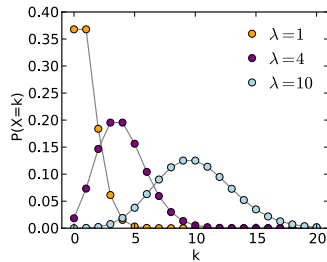
- Loi de probabilité discrète.
- Modélise un nombre d'occurrences d'un événement dans un intervalle de temps.
- Paramètre  $\lambda$  correspond au nombre moyen d'occurrences dans un intervalle de temps donné.
- Si  $\lambda_0$  est une moyenne d'évènements par unité de temps alors, pour un intervalle de temps  $\Delta t$ ,  $\lambda = \lambda_0 \Delta t$ .



### Exemples d'utilisation de la loi de poisson

- Electronique : modélise les apparitions de pannes dans les circuits électroniques
- Simulation de file d'attente : modéliser les apparitions de clients aux caisse ainsi que le temps mis pour traiter les clients.
- Astronomie : modélise le nombre de photons sur les capteurs CCD lorsque la lumière est très faible.

## Loi de poisson



### Propriétés

- ▶ Fonction de masse

$$p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- ▶ Espérance :

$$m_X = E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

=

- ▶ Variance :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

=

## Propriétés du processus de Poisson

### Moyenne $m_{X_p}(t)$

$$m_{X_p}(t) = E(X_p(t)) = E(N(0, t)) = \quad (3)$$

▶

### Variance $\text{Var}(X_p(t))$

$$\text{Var}(X_p(t)) = E((X_p(t) - m_{X_p}(t))^2) = \quad (4)$$

### Autocorrélation $R_{X_p}(t_1, t_2)$ pour $t_1 \leq t_2$

$$R_{X_p}(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

## Processus de Poisson

### Accumulation entre deux instants

- ▶ Soit  $N(t, t')$  le nombre de points  $t_i$  apparaissant sur l'intervalle  $\Delta t = t' - t$ .
- ▶  $N(\cdot)$  est un v.a. de poisson de paramètre  $\lambda \Delta t$  de probabilité

$$P(n(t, t') = k) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^k}{k!} \quad (1)$$

- ▶ Si les intervalles  $[t, t']$  et  $[u, u']$  sont disjoints alors les v.a.  $N(t, t')$  et  $N(u, u')$  sont indépendantes.

### Processus de Poisson

Un processus de poisson est un signal aléatoire défini par :

$$X_p(t) = N(0, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

- ▶ Processus de comptage d'événements.
- ▶ Les événements sont définis par leur instant d'apparition  $t_i$

5 / 28

6 / 28

## Démonstration de l'autocorrélation $R_{X_p}(t_1, t_2)$

$$R_{X_p}(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 \quad (5)$$

### Démonstration.

- ▶ Si  $t_1 = t_2$  alors Eq. (18) est bonne

$$E(X_p(t)^2) = \text{Var}(X_p(t)) + E(X_p(t))^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

- ▶ Si  $t_1 < t_2$ , les v.a.  $X_p(t_1)$  et  $X_p(t_2) - X_p(t_1)$  sont indépendantes car elles suivent des lois de poissons sur des intervalles disjoints.

- ▶  $X_p(t_1) \sim N(0, t_1)$
- ▶  $X_p(t_2) - X_p(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$

- ▶ On peut en déduire que

$$E(X_p(t_1)(X_p(t_2) - X_p(t_1))) = E(X_p(t_1))E(X_p(t_2) - X_p(t_1)) = \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1)$$

or comme 
$$X_p(t_1)X_p(t_2) = X_p(t_1)(X_p(t_2) - X_p(t_1)) + X_p(t_1)^2$$

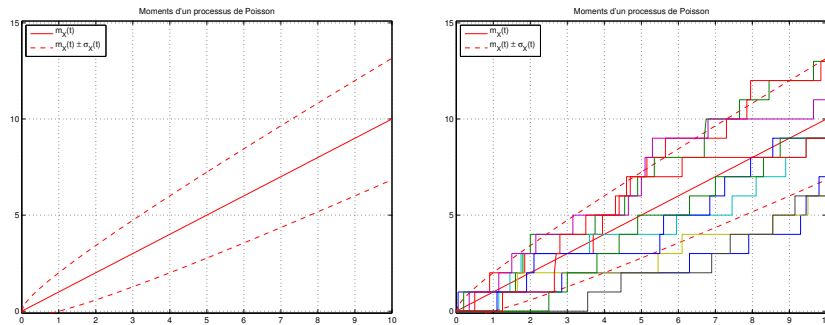
on retrouve 
$$R_{X_p}(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1)$$

□

7 / 28

8 / 28

## Exemple de réalisations



### Processus de Poisson

- ▶  $\lambda = 1$
- ▶  $m_{X_p}(t) =$
- ▶  $Var(X_p(t)) =$

9 / 28

## Probabilités d'occurrence de 1 et -1

### Probabilité d'avoir la valeur 1 à l'instant $t$

$$\begin{aligned}
 P(X_{bp}(t) = 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(x_p(t) = 2k) \\
 &= \\
 &= e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t)
 \end{aligned} \tag{7}$$

avec  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

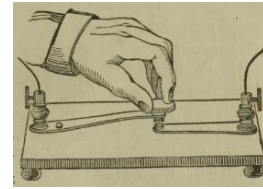
### Probabilité d'avoir la valeur -1 à l'instant $t$

$$P(X_{bp}(t) = -1) = e^{-\lambda t} \sinh(\lambda t) \tag{8}$$

avec  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

11 / 28

## Basculateur poissonien



### Définition

- ▶ Signal aléatoire obtenu à partir d'un processus de poisson  $X_p(t)$  :

$$X_{bp}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_p(t) \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } X_p(t) \text{ est impair} \end{cases} \tag{6}$$

- ▶ Signal oscillant entre la valeur 1 et -1.
- ▶ Également appelé signal du télégraphiste.
- ▶ Signal semi-aléatoire car la valeur en  $t = 0$  est connue et fixée à 1.

10 / 28

## Propriétés du basculateur poissonien

### Moyenne $m_{X_{bp}}(t)$

$$m_{X_{bp}}(t) = E(X_{bp}(t)) = \tag{9}$$

### Variance $Var(X_{bp}(t))$

$$Var(X_{bp}(t)) = E(X_{bp}(t)^2) - E(X_{bp}(t))^2 = \tag{10}$$

### Autocorrélation $R_{X_{bp}}(t_1, t_2)$ pour $t_1 \leq t_2$

$$R_{X_{bp}}(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}$$

Signal stationnaire ?

12 / 28

## Basculateur poissonnien aléatoire

Pour rendre la basculateur poissonnien totalement aléatoire on définit :

$$\tilde{X}_{bp}(t) = AX_{bp}(t) \quad (11)$$

- ▶  $A$  uniforme discrète sur  $\{-1, 1\}$  avec une probabilité  $1/2$  :  $A \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$ .
- ▶  $A$  et  $X_{bp}(t)$  sont indépendantes.
- ▶ L'espérance devient

$$E(\tilde{X}_{bp}(t)) = E(A)E(X_{bp}(t)) =$$

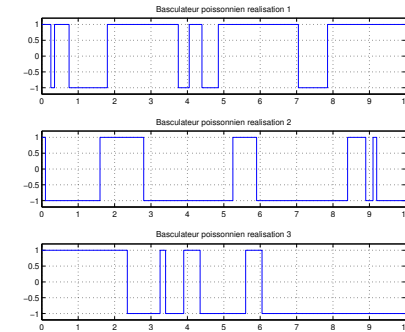
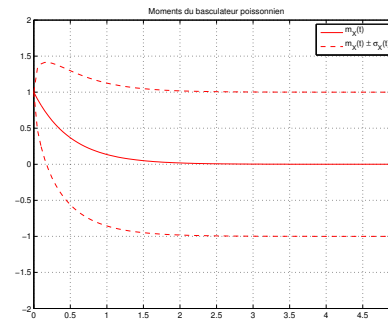
- ▶ Et la variance

$$Var(\tilde{X}_{bp}(t)) = E(\tilde{X}_{bp}(t)^2) - E(\tilde{X}_{bp}(t))^2 = \quad (12)$$

- ▶ L'auto-corrélation est inchangée.
- ▶ Le basculateur poissonnien aléatoire est donc

13 / 28

## Exemple de réalisations



### Basculateur poissonnien

- ▶  $\lambda = 1$
- ▶  $m_{X_{bp}}(t) =$
- ▶  $Var(X_{bp}(t)) =$

14 / 28

## Historique de la marche aléatoire

### The Problem of the Random Walk.

CAN any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.

A man starts from a point O and walks  $l$  yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another  $l$  yards in a second straight line. He repeats this process  $n$  times. I require the probability that after these  $n$  stretches he is at a distance between  $r$  and  $r + \delta r$  from his starting point, O.

The problem is one of considerable interest, but I have only succeeded in obtaining an integrated solution for two stretches. I think, however, that a solution ought to be found, if only in the form of a series in powers of  $1/n$ , when  $n$  is large.

KARL PEARSON.

The Gables, East Hlsley, Berks.



- ▶ Introduit par Karl Pearson en 1905 pour modéliser la migration des moustiques dans une forêt (Nature 72, 294 ; 318 ; 342 (1905)).
- ▶ Problème résolu par Lord Rayleigh qui lui donne l'approximation gaussienne.
- ▶ Remarque de Karl Pearson :

"The most probable place to find a drunken man who is at all capable of keeping on his feet is somewhere near his starting point!"

15 / 28

## Marche aléatoire

### Définition

Signal aléatoire discret défini récursivement par

$$X_{ma}(n) = X_{ma}(n-1) + sU_n = s \sum_{i=1}^n U_i$$

- ▶  $U_n \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$  où les variables aléatoires  $U_n$  sont indépendantes.
- ▶  $X_{ma}(0) = 0$
- ▶  $s \in \mathbb{R}$  est le pas
- ▶ La valeur du signal aléatoire change à chaque instant  $n$ .
- ▶ Version continue de période  $T$  :

$$\tilde{X}_{ma}(t) = \{X_{ma}(n) | nT \leq t < (n+1)T\}$$

16 / 28

# Propriétés de la marche aléatoire (1)

## Probabilités à l'instant $n$

- ▶ À l'instant  $n$ ,  $X_{ma}$  peut prendre les valeurs

$$X_{ma}(n) \in \{-ns, -(n+1)s, \dots, (n-1)s, ns\}$$

- ▶ Si les réalisations de  $U_n$  ont données  $k$  fois  $+1$  et  $n - k$  fois  $-1$  alors

$$X_{ma}(n) = ks - (n - k)s = ms, \quad m = 2k - n$$

- ▶ On reconnaît la loi binomiale de probabilité  $p = \frac{1}{2}$

$$P(X_{ma}(n) = ms) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = C_n^k \frac{1}{2^n} \quad k = \frac{m+n}{2} \quad (13)$$

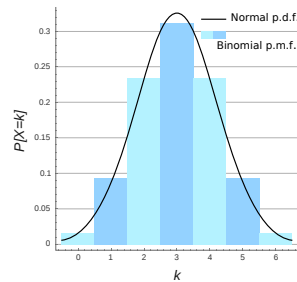
17 / 28

# Approximation pour $n$ grand

## Approximation de la loi binomiale

Quand  $n$  est grand, et que  $k$  est dans le voisinage  $\sqrt{npq}$  de  $np$ , alors :

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(k-np)^2 / 2npq} \quad (16)$$



## Application à la marche aléatoire

Dans notre cas  $p = q = .5$  et  $m=2k - n$  alors

$$P(X_{ma}(n) = ms) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}} e^{-m^2/2n} \quad (17)$$

19 / 28

# Propriétés de la marche aléatoire (1)

## Moyenne $m_{X_{ma}}(n)$

$$m_{X_{ma}}(n) = E\left(\sum_{i=1}^n U_i\right) = \sum_{i=1}^n E(U_i) = \quad (14)$$

## Variance $Var(X_{ma}(n))$

$$Var(X_{ma}(n)) = E(X_{ma}(n)^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right) = \quad (15)$$

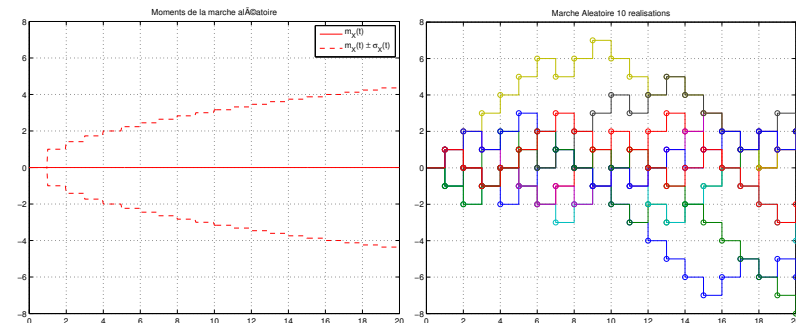
## Autocorrélation $R_{X_{ma}}(n_1, n_2)$ pour $n_1 < n_2$

$$R_{X_{ma}}(n_1, n_2) = E(X_{ma}(n_1)X_{ma}(n_2)) =$$

Signal stationnaire ?

18 / 28

# Exemple de réalisations



## Marche aléatoire

- ▶  $s = 1$
- ▶  $m_{X_p}(t) =$
- ▶  $Var(X_p(t)) =$

20 / 28

## Signal aléatoire gaussien

### Définition

Un signal aléatoire gaussien  $X_G(t, w)$  est un signal aléatoire qui est complètement défini par une loi gaussienne.

- ▶ Soit le vecteur aléatoire suivant :

$$\mathbf{X}_G(w)^T = [X_G(t_1, w), X_G(t_2, w), \dots, X_G(t_k, w)]^T \quad (18)$$

- ▶ Alors la densité de probabilité d'un signal gaussien est

$$p_{\mathbf{X}_G}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - m_{\mathbf{X}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - m_{\mathbf{X}})} \quad (19)$$

avec le vecteur des moyenne  $m_{\mathbf{X}}$  et la matrice de covariance  $\Sigma$  définis par

$$m_{\mathbf{X}} = [m_X(t_1), m_X(t_2), \dots, m_X(t_k)]^T \quad (20)$$

$$(\Sigma)_{i,j} = E(X_c(t_i, w)X_c(t_j, w)^*) = C_X(t_i, t_j) \quad (21)$$

21 / 28

## Bruit gaussien

### Définition

Le bruit gaussien est un signal aléatoire, dont la densité de probabilité suit une loi gaussienne :

$$X_B(t, w) \sim \mathcal{N}(0, \sigma(t)^2) \quad \forall i \quad (22)$$

### Bruit gaussien Indépendant et identiquement distribué (I.I.D.)

- ▶ Indépendant implique que  $X_B(t_1, w)$  et  $X_B(t_2, w)$  indép. pour  $t_1 \neq t_2$ .
- ▶ Identiquement distribué implique un signal stationnaire ( $\sigma(t) = \sigma$ )

$$m_{X_B}(t) = 0 \quad (23)$$

$$Var_{X_B}(t) = \sigma^2 \quad (24)$$

$$R_{X_B}(\tau) = C_{X_B}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (25)$$

- ▶ Signal complètement connu car moyenne et matrice de covariance connus.
- ▶ Bruit blanc : contient toutes les fréquences du spectre.

23 / 28

## Signal aléatoire gaussien (2)

### Signal gaussien stationnaire

- ▶ Moyenne

$$m_{\mathbf{X}_G} = m_X [1, 1, \dots, 1]^T$$

$$m_{X_G}(t) = m_{X_G}$$

- ▶ Covariance

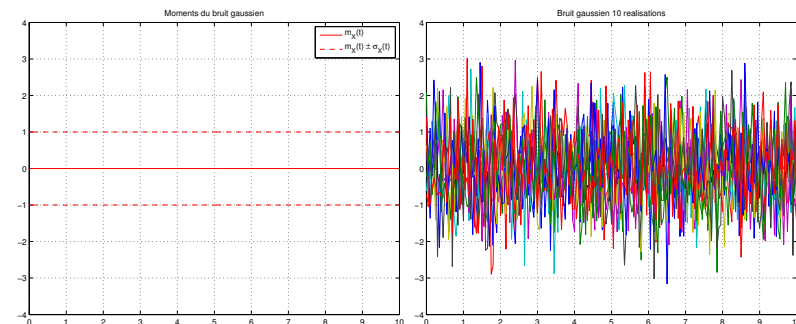
$$(\Sigma)_{i,j} = C_X(t_j - t_i) = C_X(\tau)$$

### Discussion

- ▶ La loi Gaussienne est complètement caractérisée par ses deux premiers moments
- ▶ Dans le cas stationnaire alors  $m_X$  et  $R_{X_G}(\tau)/C_{X_G}(\tau)$  sont suffisants pour connaître complètement la signal aléatoire..

22 / 28

## Exemple de réalisations



### Bruit Gaussien

- ▶  $\sigma = 1$
- ▶  $m_{X_p}(t) = 0$
- ▶  $Var(X_p(t)) = \sigma^2$

24 / 28

## Processus de Wiener

### Historique

- ▶ En l'honneur de Norbert Wiener, fondateur de la cybernétique.
- ▶ Aussi appelé mouvement brownien (Robert Brown).
- ▶ Utilisé en physique statistique, économie, finances.



### Définition

Le processus de Wiener est construit comme

$$X_w(t, w) = \lim_{T \rightarrow 0} \tilde{X}_{ma}(t, w) \quad \text{s.c.} \quad s = \sqrt{T}$$

C'est un processus Gaussien caractérisé par 3 propriétés :

- ▶  $X(0, w) = 0$
- ▶ Le signal aléatoire certainement continu (avec une proba 1).
- ▶ Les incréments  $X(t_2, w) - X(t_1, w)$  sont indépendants et suivent une loi gaussienne de type  $\mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$ .

## Processus de Wiener (2)

### Densité de probabilité

$$p_{X_w(t,w)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (26)$$

### Moyenne $m_{X_w}(t)$

$$m_{X_w}(t) = 0$$

### Variance $Var_{X_w}(t)$

$$Var_{X_w}(t) = t$$

### Autocorrélation $R_{X_w}(t_1, t_2)$ pour $t_1 < t_2$

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1, w)X(t_2, w)) \quad (27)$$

$$= E(X(t_1, w)(X(t_2, w) - X(t_1, w) + X(t_1, w))) \quad (28)$$

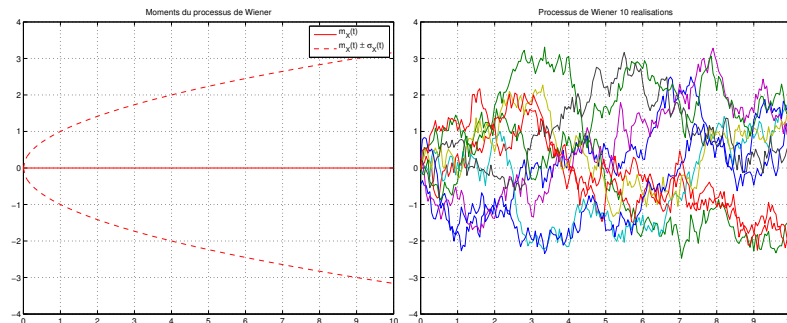
$$= E(X(t_1, w)(X(t_2, w) - X(t_1, w))) + E(X(t_1, w)^2) = t_1 \quad (29)$$

Signal stationnaire ?

25 / 28

26 / 28

## Exemple de réalisations



### Processus de Wiener

- ▶  $m_{X_p}(t) = 0$
- ▶  $Var(X_p(t)) = t$

27 / 28

## Bibliographie

Cours fortement inspiré des références suivantes :

- ▶ **Traitement Statistique du Signal**, R. Herault, *INSA Rouen*.  
<https://moodle.insa-rouen.fr/course/view.php?id=199>
- ▶ **Signaux Aléatoires**, J.-F. Bercher, *ESIEE*  
[http://www.esiee.fr/~bercherj/New/polys/poly\\_alea.pdf](http://www.esiee.fr/~bercherj/New/polys/poly_alea.pdf)
- ▶ **Théorie du signal**, C. Jutten,  
[http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/Theorie\\_du\\_signal.pdf](http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/Theorie_du_signal.pdf)
- ▶ **Probability, random variables and stochastic processes.**, A Papoulis

28 / 28