Signaux Aléatoires

Propriétés spectrales des signaux stationnaires

R. Flamary

7 décembre 2015

Plan du cours

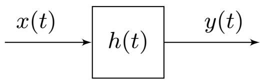
Introduction

Signaux aléatoires

Exemples de signaux aléatoires

Propriétés spectrales des signaux stationnaires
- Rappels systèmes linéaires et transformée de Fourier
  - Système linéaire
  - Tranformée de Fourier
- Densité spectrale de puissance, Wiener-Khinchin
  - Théorème de Wiener-Kintchine
  - Bruit blanc
- Formule des interférences
  - Théorème des interférences
  - Puissance dans une bande spectrale
  - Indentification de systèmes

Système linéaire



Réponse impulsionnelle et convolution

Un système linéaire invariant dans le temps peut être exprimé sous la fome suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1}$$

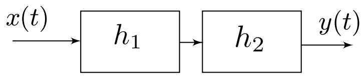
- $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (pour une entrée $x(t) = \delta(t)$)
- L'intégrale (1) est la convolution entre l'entrée $x(t)$ et la fonction $h(t)$.

Propriétés des systèmes linéaires invariants

Mise en série

Soit deux SLIT $h_1(t)$ et $h_2(t)$ mis en série.
Le système équivalent est

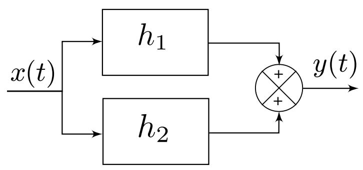
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



Mise en parallèle

Soit deux SLIT $h_1(t)$ et $h_2(t)$ mis en parallèle.
Le système équivalent est

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$



Stabilité

Si un SLIT est stable alors

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt \text{ est bornée}$$

Propriétés des systèmes linéaires invariants (2)

Causalité

Un système SLIT est causal si sa réponse impulsionnelle est nulle pour $t < 0$:

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse du système à une entré de type échelon, c'est à dire pour

$$x(t) = \Gamma(t)$$

La sortie du système peut ainsi se mettre sous la forme suivante :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(v)dv \tag{2}$$

Transformée de Fourier

Définition

Soit $x(t)$ une fonction à variable réelle, on appelle la transformée de Fourier de $x(t)$, notée $X(f)$, la fonction définie comme :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

On notera également la paire $x(t)$, $X(f)$ comme

$$x(t) \to X(f)$$

Et la tranformée de Fourier s'écrit sous la forme

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

Transformée de Fourier (2)

Transformée de Fourier inverse

Si elle existe la transformée de Fourier inverse de $X(f)$ est :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

- Pour que la TF inverse existe $x(t)$ doit être à énergie finie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Dans ce cours on supposera les conditions satisfaites pour l'existence de la transformée inverse.

Propriétés de de Transformée de Fourier

Linéarité

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux de TF respectives $X_1(f)$ et $X_2(f)$.
Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to aX_1(f) + bX_2(f)$$

Démonstration. Découle naturellement de la propriété de linéarité de l'intégrale.

Décalage temporel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$.
Pour $t_0 \in \mathbb{R}$,soit $x(t - t_0)$ une translatée de $x(t)$ alors, on a :

$$x(t - t_0) \to e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$$

Démonstration. Changement de variable dans l'intégrale.

Propriétés de de Transformée de Fourier (2)

Décalage fréquentiel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \to X(f - f_0)$$

En multipliant un signal par un exponentielle complexe de fréquence f_0, on translate sa transformée de Fourier de f_0.
Démonstration. Regrouper les exponentielles dans l'intégrale.

Changement d'échelle

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors, pour $a \neq 0$

$$x(at) \to \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Démonstration. Traiter les cas $a > 0$ et $a < 0$ séparément.

Propriétés de de Transformée de Fourier (3)

Dérivation

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors

$$\frac{dx(t)}{dt} \to j2\pi f X(f)$$

Intégration

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$ avec $\int x(t)dt = 0$ on a alors

$$\int x(t)dt \to \frac{1}{j2\pi} f X(f)$$

Signal conjugué

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$ et $x^*(t)$ son conjugué. On a alors

$$x^*(t) \to X^*(-f)$$

Propriétés de de Transformée de Fourier (4)

Parité

- Si un signal $x(t)$ est un signal réel et pair alors $X(f)$ est réelle et paire.
- Si un signal $x(t)$ est un signal réel impair alors $X(f)$ est imaginaire pure et impaire.

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

Convolution (Théorème de Plancherel)

Soit un signal $x(t)$ et un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ deux signaux de tranformée de Fourier respectives $X(f)$ et $H(f)$.
La transformée de Fourier du produit de convolution entre $x(t)$ et $h(t)$ est

$$x * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \to X(f)H(f)$$

Densité Spectrale de Puissance (DSP)

Théorème de Wiener-Kintchine

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) d'un processus aléatoire stationnaire au sens large est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation :

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \tag{3}$$

- Représentation spectrale d'un signal aléatoire.
- **Inversion**
$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) e^{2j\pi f\tau} df \tag{4}$$
- **Signal discret** $X(k)$
$$S_{XX}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{XX}(k) e^{-2j\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{XX}(k) z^{-k}$$
  - $z = e^{2j\pi f}$ on reconnaît la transformée en z.
  - DSP continue et périodique.

Propriétés de la DSP

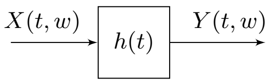
- La Densité Spectrale de Puissance est une fonction réelle car TF d'une fonction paire.
- **Positivité**
$$S_{XX}(f) \geq 0 \tag{5}$$
- **DSP et auto-covariance**
$$S_{XX}(f) = \mathcal{F}\{C_x(\tau)\} + (m_X)^2\delta(f) \tag{6}$$
- **Puissance moyenne**
$$P_X = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)df = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(t,w)|^2dt \tag{7}$$

Bruit blanc

Définition
Le bruit blanc est un type de bruit ≪ limite ≫ qui a une corrélation nulle entre deux instants temporels différents.
$$R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \tag{8}$$

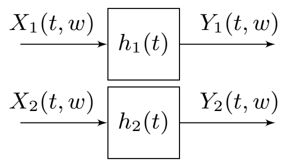
- Un signal I.I.D. (Indépendant et Identiquement Distribué) est un bruit blanc.
- La DSP d'un bruit blanc est
$$S_{XX}(f) = \mathcal{F}[R_{XX}(\tau)] = \frac{N_0}{2} \tag{9}$$
Comme $R_{XX}(0)$ représente la puissance moyenne du signal un bruit blanc continu a une puissance moyenne infinie.

Convolution et signaux aléatoires



Transformation de la moyenne
Si $X(t,w)$ est un s.a. stationnaire, alors la moyenne du signal de sortie est égale à
$$m_Y = E(\int_{-\infty}^{\infty} X(u,w)h(t-u)du)$$
$$= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u)du =$$
La transformée de Fourier de $h(t)$:
$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2j\pi ft}dt \tag{10}$$
On retrouve bien $H(0)$ qui est le gain complexe à la fréquence nulle.

Théorème des interférences



- Soit $X_1(t,w)$ et $X_2(t,w)$ deux signaux aléatoires stationnaires.
- Soit $h_1(t)$ et $h_2(t)$ deux systèmes linéaires invariants.
$$Y_1(t,w) = (X_1 * h_1)(t,w)$$
$$Y_2(t,w) = (X_2 * h_2)(t,w)$$

Théorème des interférences

- La formule des interférences stipule que
$$R_{Y_1Y_2}(\tau) = (h_1 * R_{X_1X_2} * h_2^{*-})(\tau) \tag{11}$$
où $h_2^-(t) = h_2(-t)$.
- Ceci donne dans l'espace de Fourier la relation
$$S_{Y_1Y_2}(f) = H_1(f)S_{X_1X_2}(f)H_2^*(f) \tag{12}$$
où $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont respectivement les TF des réponses impulsionnelles $h_1(t)$ et $h_2(t)$.

Démonstration du théorème des interférences (1)

$$\begin{aligned} R_{Y_1Y_2}(\tau) &= E(Y_1(t,w)Y_2(t-\tau,w)) \\ &= E[(X_1 * h_1)(t,w)(X_2 * h_2)(t-\tau,w)] \end{aligned}$$

Par définition

$$(X_1 * h_1)(t,w) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u,w)h_1(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t-u,w)h_1(u)du$$

$$(X_2 * h_2)(t-\tau,w) = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(v,w)h_2(t-\tau-v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(t-\tau-v,w)h_2(v)dv$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} R_{Y_1Y_2}(\tau) &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X_1(t-u,w)h_1(u)du \int_{-\infty}^{\infty} X_2^*(t-\tau-v,w)h_2^*(v)dv\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)X_1(t-u,w)X_2^*(t-\tau-v,w)h_2^*(v)dudv\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)E\left[X_1(t-u,w)X_2^*(t-\tau-v,w)\right]h_2^*(v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)R_{X_1X_2}(\tau+v-u)h_2^*(v)dudv \end{aligned}$$

Démonstration du théorème des interférences (2)

On a trouvé

$$R_{Y_1Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)R_{X_1X_2}(\tau+v-u)h_2^*(v)dudv$$

On voit ainsi apparaître le produit de convolution par h_1

$$\begin{aligned} R_{Y_1Y_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} (h_1 * R_{X_1X_2})(\tau+v)h_2^*(v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (h_1 * R_{X_1X_2})(u)h_2^*(u-\tau)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (h_1 * R_{X_1X_2})(u)h_2^{*-}(\tau-u)du \\ &= (h_1 * R_{X_1X_2} * h_2^{*-})(\tau) \end{aligned}$$

avec $h_2^-(t) = h_2(-t)$.

Filtrage d'un signal

$$X(t,w) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t,w)$$

Théorème des interférences

- Cas particulier $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ et $X_1(t,w) = X_2(t,w) = X(t,w)$
- Formule des interférences formule des interférences devient

$$R_{YY}(\tau) = (h * R_{XX} * h^{*-})(\tau) \tag{13}$$

- Dans le domaine fréquentiel :

$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f)|H(f)|^2 \tag{14}$$

Puissance dans une bande de fréquence

$$X(t,w) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t,w)$$

Puissance de $X(t,w)$ dans la bande $[f_1, f_2]$

- Soit le filtre filtre parfait définit par

$$H_{[f_1,f_2]}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_1 < |f| < f_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{15}$$

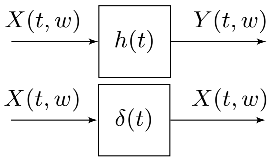
- La puissance du signal $Y(t,w)$ en sortie du filtre est égale à

$$\begin{aligned} P_Y &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)|H(f)|^2df \\ &= \int_{-f_2}^{f_1} S_{XX}(f)df + \int_{f_1}^{f_2} S_{XX}(f)df = 2\int_{f_1}^{f_2} S_{XX}(f)df \end{aligned}$$

- **Puissance dans la bande** $[f_1, f_2]$ **:**

$$P_{[f_1,f_2]} = 2\int_{f_1}^{f_2} S_{XX}(f)df \tag{16}$$

Intercorrélation entrée/sortie d'un système



- Soit $X_1(t,w)$ et $X_2(t,w)$ deux signaux aléatoires stationnaires.
- Soit $h_1(t)$ et $h_2(t)$ deux systèmes linéaires invariants.

$$Y_1(t,w) = (X * h)(t,w)$$
$$Y_2(t,w) = X(t,w)$$

Intercorrélation

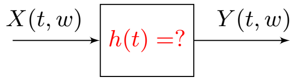
- En appliquant la formule des interférences on obtient

$$R_{YX} = (h * R_{XX} * \delta)(t) = (h * R_{XX})(t) \tag{17}$$

Ce qui nous donne dans le domaine fréquentiel

$$S_{YX} = S_{XX}(f)H(f) \tag{18}$$

Indentification de système (1)



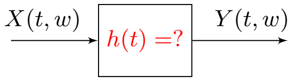
- On cherche à à estimer (retrouver) la réponse impulsionnelle d'un système linéaire inconnu.
- Accès uniquement à une ≪ boite noire ≫.

⇒ Comment retrouver la réponse impulsionnelle du système ?

Méthode 1 : Impulsion en entrée

- Entrée : $X(t,w) = \delta(t)$
- Sortie : $Y(t,w) = (h * \delta)(t) = h(t)$
- Signaux déterministes.
- Problème :

Indentification de système (2)



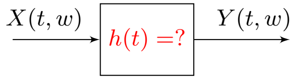
Méthode 2 : Échelon en entrée

- Entrée : $X(t,w) = \Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1/2 & \text{pour } t = 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$
- Sortie : $Y(t,w) = (h * \Gamma)(t) =$
- Signaux déterministes, on retrouve $h(t)$ en utilisant

$$\hat{h}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad \hat{H}(f) = Y(f)(2j\pi f) \tag{19}$$

- Problème :

Indentification de système (3)



Méthode 3 : Bruit blanc en entrée

- Entrée : $X(t,w) = B(t), \qquad R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau), \qquad S_X(f) = \frac{N_0}{2}$
- Sortie : $Y(t,w) = (h * X)(t,w)$
- En utilisant la formule des interférence on trouve

$$R_{YX}(\tau) = (h * \frac{N_0}{2}\delta)(\tau) = \frac{N_0}{2}h(\tau) \quad \text{ou} \quad S_{YX}(f) = \frac{N_0}{2}H(f) \tag{20}$$

- Cas bruité $Z(t,w) = Y(t,w) + B(t) \quad$ ou $\quad Z(f) = Y(f) + B(f)$

$$R_{ZX}(\tau) =$$

Si B et X sont non corrélés et de moyenne nulle, alors on retrouve (20).

- En pratique, on estime $R_{YX}(\tau)$ sur une longue periode temporelle en utilisant la propriété d'ergodicité.