

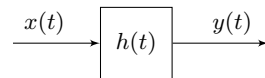
Signaux Aléatoires

Propriétés spectrales des signaux stationnaires

R. Flamary

3 septembre 2018

Système linéaire



Réponse impulsionnelle et convolution

Un système linéaire invariant dans le temps peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

- ▶ $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (pour une entrée $x(t) = \delta(t)$)
- ▶ L'intégrale (1) est la convolution entre l'entrée $x(t)$ et la fonction $h(t)$.

Plan du cours

Introduction

Signaux aléatoires

Exemples de signaux aléatoires

Propriétés spectrales des signaux stationnaires

Rappels systèmes linéaires et transformée de Fourier

Système linéaire

Transformée de Fourier

Densité spectrale de puissance, Wiener-Khinchin

Théorème de Wiener-Kintchine

Bruit blanc

Formule des interférences

Théorème des interférences

Puissance dans une bande spectrale

Indentification de systèmes

2 / 24

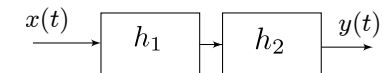
Propriétés des systèmes linéaires invariants

Mise en série

Soit deux SLIT $h_1(t)$ et $h_2(t)$ mis en série.

Le système équivalent est

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

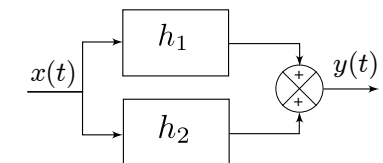


Mise en parallèle

Soit deux SLIT $h_1(t)$ et $h_2(t)$ mis en parallèle.

Le système équivalent est

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$



Stabilité

Si un SLIT est stable alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt \text{ est bornée}$$

3 / 24

4 / 24

Propriétés des systèmes linéaires invariants (2)

Causalité

Un système SLIT est causal si sa réponse impulsionnelle est nulle pour $t < 0$:

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse du système à une entrée de type échelon, c'est à dire pour

$$x(t) = \Gamma(t)$$

La sortie du système peut ainsi se mettre sous la forme suivante :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(v)dv \quad (2)$$

5 / 24

Transformée de Fourier (2)

Transformée de Fourier inverse

Si elle existe la transformée de Fourier inverse de $X(f)$ est :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

- Pour que la TF inverse existe $x(t)$ doit être à énergie finie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Dans ce cours on supposera les conditions satisfaites pour l'existence de la transformée inverse.

7 / 24

Transformée de Fourier

Définition

Soit $x(t)$ une fonction à variable réelle, on appelle la transformée de Fourier de $x(t)$, notée $X(f)$, la fonction définie comme :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

On notera également la paire $x(t)$, $X(f)$ comme

$$x(t) \rightarrow X(f)$$

Et la transformée de Fourier s'écrit sous la forme

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

6 / 24

Propriétés de de Transformée de Fourier

Linéarité

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux de TF respectives $X_1(f)$ et $X_2(f)$.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$$

Démonstration. Découle naturellement de la propriété de linéarité de l'intégrale.

Décalage temporel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$.

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, soit $x(t - t_0)$ une translatée de $x(t)$ alors, on a :

$$x(t - t_0) \rightarrow e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$$

Démonstration. Changement de variable dans l'intégrale.

8 / 24

Propriétés de de Transformée de Fourier (2)

Décalage fréquentiel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \rightarrow X(f - f_0)$$

En multipliant un signal par un exponentielle complexe de fréquence f_0 , on translate sa transformée de Fourier de f_0 .

Démonstration. Regrouper les exponentielles dans l'intégrale.

Changement d'échelle

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors, pour $a \neq 0$

$$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Démonstration. Traiter les cas $a > 0$ et $a < 0$ séparément.

9 / 24

Propriétés de de Transformée de Fourier (3)

Dérivation

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j2\pi f X(f)$$

Intégration

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$ avec $\int x(t)dt = 0$ on a alors

$$\int x(t)dt \rightarrow \frac{1}{j2\pi} f X(f)$$

Signal conjugué

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$ et $x^*(t)$ son conjugué. On a alors

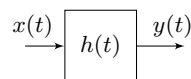
$$x^*(t) \rightarrow X^*(-f)$$

10 / 24

Propriétés de de Transformée de Fourier (4)

Parité

- ▶ Si un signal $x(t)$ est un signal réel et pair alors $X(f)$ est réelle et paire.
- ▶ Si un signal $x(t)$ est un signal réel impair alors $X(f)$ est imaginaire pure et impaire.



Convolution (Théorème de Plancherel)

Soit un signal $x(t)$ et un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ deux signaux de transformée de Fourier respectives $X(f)$ et $H(f)$.

La transformée de Fourier du produit de convolution entre $x(t)$ et $h(t)$ est

$$x * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \rightarrow X(f)H(f)$$

11 / 24

Densité Spectrale de Puissance (DSP)

Théorème de Wiener-Kintchine

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) d'un processus aléatoire stationnaire au sens large est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation :

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-2j\pi f\tau}d\tau \quad (3)$$

- ▶ Représentation spectrale d'un signal aléatoire.
- ▶ Inversion

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)e^{2j\pi f\tau}df \quad (4)$$

- ▶ Signal discret $X(k)$

$$S_{XX}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{XX}(k)e^{-2j\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{XX}(k)z^{-k}$$

- ▶ $z = e^{2j\pi f}$ on reconnaît la transformée en z .
- ▶ DSP continue et périodique.

12 / 24

Propriétés de la DSP

- ▶ La Densité Spectrale de Puissance est une fonction réelle car TF d'une fonction paire.

- ▶ **Positivité**

$$S_{XX}(f) \geq 0 \quad (5)$$

- ▶ **DSP et auto-covariance**

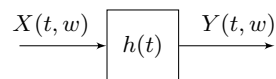
$$S_{XX}(f) = \mathcal{F}\{C_x(\tau)\} + (m_X)^2 \delta(f) \quad (6)$$

- ▶ **Puissance moyenne**

$$P_X = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t, w)|^2 dt \quad (7)$$

13 / 24

Convolution et signaux aléatoires



Transformation de la moyenne

Si $X(t, w)$ est un s.a. stationnaire, alors la moyenne du signal de sortie est égale à

$$\begin{aligned} m_Y &= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(u, w) h(t-u) du\right) \\ &= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du = \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de $h(t)$:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad (10)$$

On retrouve bien $H(0)$ qui est le gain complexe à la fréquence nulle.

15 / 24

Bruit blanc

Définition

Le bruit blanc est un type de bruit « limite » qui a une corrélation nulle entre deux instants temporels différents.

$$R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (8)$$

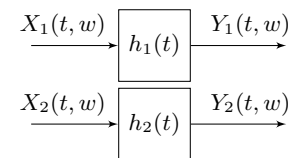
- ▶ Un signal I.I.D. (Indépendant et Identiquement Distribué) est un bruit blanc.
- ▶ La DSP d'un bruit blanc est

$$S_{XX}(f) = \mathcal{F}[R_{XX}(\tau)] = \frac{N_0}{2} \quad (9)$$

Comme $R_{XX}(0)$ représente la puissance moyenne du signal un bruit blanc continu a une puissance moyenne infinie.

14 / 24

Théorème des interférences



- ▶ Soit $X_1(t, w)$ et $X_2(t, w)$ deux signaux aléatoires stationnaires.
- ▶ Soit $h_1(t)$ et $h_2(t)$ deux systèmes linéaires invariants.

$$Y_1(t, w) = (X_1 * h_1)(t, w)$$

$$Y_2(t, w) = (X_2 * h_2)(t, w)$$

Théorème des interférences

- ▶ La formule des interférences stipule que

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = (h_1 * R_{X_1 X_2} * h_2^{*-})(\tau) \quad (11)$$

où $h_2^-(t) = h_2(-t)$.

- ▶ Ceci donne dans l'espace de Fourier la relation

$$S_{Y_1 Y_2}(f) = H_1(f) S_{X_1 X_2}(f) H_2^*(f) \quad (12)$$

où $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont respectivement les TF des réponses impulsionnelles $h_1(t)$ et $h_2(t)$.

16 / 24

Démonstration du théorème des interférences (1)

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = E(Y_1(t, w)Y_2(t - \tau, w)) \\ = E[(X_1 * h_1)(t, w)(X_2 * h_2)(t - \tau, w)]$$

Par définition

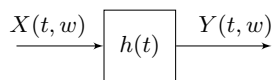
$$(X_1 * h_1)(t, w) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u, w)h_1(t - u)du = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t - u, w)h_1(u)du \\ (X_2 * h_2)(t - \tau, w) = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(v, w)h_2(t - \tau - v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(t - \tau - v, w)h_2(v)dv$$

On en déduit donc que

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_1(t - u, w)h_1(u)du \int_{-\infty}^{\infty} X_2^*(t - \tau - v, w)h_2^*(v)dv \right] \\ = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)X_1(t - u, w)X_2^*(t - \tau - v, w)h_2^*(v)dudv \right] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)E[X_1(t - u, w)X_2^*(t - \tau - v, w)]h_2^*(v)dudv \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)R_{X_1 X_2}(\tau + v - u)h_2^*(v)dudv$$

17 / 24

Filtrage d'un signal



Théorème des interférences

- Cas particulier $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ et $X_1(t, w) = X_2(t, w) = X(t, w)$
- Formule des interférences formule des interférences devient

$$R_{Y Y}(\tau) = (h * R_{X X} * h^{*-})(\tau) \quad (13)$$

- Dans le domaine fréquentiel :

$$S_{Y Y}(f) = S_{X X}(f)|H(f)|^2 \quad (14)$$

19 / 24

Démonstration du théorème des interférences (2)

On a trouvé

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)R_{X_1 X_2}(\tau + v - u)h_2^*(v)dudv$$

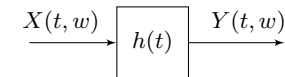
On voit ainsi apparaître le produit de convolution par h_1

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (h_1 * R_{X_1 X_2})(\tau + v)h_2^*(v)dv \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (h_1 * R_{X_1 X_2})(u)h_2^*(u - \tau)du \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (h_1 * R_{X_1 X_2})(u)h_2^{*-}(\tau - u)du \\ = (h_1 * R_{X_1 X_2} * h_2^{*-})(\tau)$$

avec $h_2^{*-}(t) = h_2(-t)$.

18 / 24

Puissance dans une bande de fréquence



Puissance de $X(t, w)$ dans la bande $[f_1, f_2]$

- Soit le filtre parfait défini par

$$H_{[f_1, f_2]}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_1 < |f| < f_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (15)$$

- La puissance du signal $Y(t, w)$ en sortie du filtre est égale à

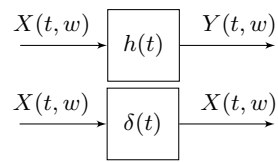
$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Y Y}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{X X}(f)|H(f)|^2 df \\ = \int_{-f_2}^{f_1} S_{X X}(f)df + \int_{f_1}^{f_2} S_{X X}(f)df = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_{X X}(f)df$$

- Puissance dans la bande $[f_1, f_2]$:

$$P_{[f_1, f_2]} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_{X X}(f)df \quad (16)$$

20 / 24

Intercorrélation entrée/sortie d'un système



- ▶ Soit $X_1(t, w)$ et $X_2(t, w)$ deux signaux aléatoires stationnaires.
- ▶ Soit $h_1(t)$ et $h_2(t)$ deux systèmes linéaires invariants.

$$Y_1(t, w) = (X * h)(t, w)$$

$$Y_2(t, w) = X(t, w)$$

Intercorrélation

- ▶ En appliquant la formule des interférences on obtient

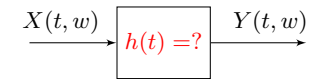
$$R_{YX} = (h * R_{XX} * \delta)(t) = (h * R_{XX})(t) \quad (17)$$

Ce qui nous donne dans le domaine fréquentiel

$$S_{YX} = S_{XX}(f)H(f) \quad (18)$$

21 / 24

Identification de système (1)



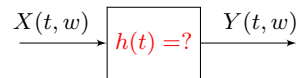
- ▶ On cherche à estimer (retrouver) la réponse impulsionnelle d'un système linéaire inconnu.
- ▶ Accès uniquement à une « boîte noire ».
- ⇒ Comment retrouver la réponse impulsionnelle du système ?

Méthode 1 : Impulsion en entrée

- ▶ Entrée : $X(t, w) = \delta(t)$
- ▶ Sortie : $Y(t, w) = (h * \delta)(t) = h(t)$
- ▶ Signaux déterministes.
- ▶ Problème :

22 / 24

Identification de système (2)



Méthode 2 : Échelon en entrée

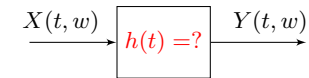
- ▶ Entrée : $X(t, w) = \Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1/2 & \text{pour } t = 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$
- ▶ Sortie : $Y(t, w) = (h * \Gamma)(t) =$
- ▶ Signaux déterministes, on retrouve $h(t)$ en utilisant

$$\hat{h}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad \hat{H}(f) = Y(f)(2j\pi f) \quad (19)$$

- ▶ Problème :

23 / 24

Identification de système (3)



Méthode 3 : Bruit blanc en entrée

- ▶ Entrée : $X(t, w) = B(t)$, $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$, $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$
- ▶ Sortie : $Y(t, w) = (h * X)(t, w)$
- ▶ En utilisant la formule des interférence on trouve

$$R_{YX}(\tau) = (h * \frac{N_0}{2} \delta)(\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau) \quad \text{ou} \quad S_{YX}(f) = \frac{N_0}{2} H(f) \quad (20)$$

- ▶ Cas bruité $Z(t, w) = Y(t, w) + B(t)$ ou $Z(f) = Y(f) + B(f)$

$$R_{ZX}(\tau) =$$

Si B et X sont non corrélés et de moyenne nulle, alors on retrouve (20).

- ▶ En pratique, on estime $R_{YX}(\tau)$ sur une longue période temporelle en utilisant la propriété d'ergodicité.

24 / 24