M1 - Signaux aléatoires

TD 1

Rémi Flamary, André Ferrari

Exercice 1

On considère le signal $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ où φ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$.

1. Calculer $\mathsf{E}[x(t)]$ puis $\mathsf{E}[x(t_1)x(t_2)]$. Le signal $x(t)$ est-il stationnaire au second ordre ?
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(\tau)$.
3. Quelle est la puissance de $x(t)$.

Exercice 2

On considère le signal $x(n) = A + w(n)$ où $w(n)$ est un bruit i.i.d. $w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Calculer $\mathsf{E}[x(n)]$ puis $\mathsf{E}[x(n_1)x(n_2)]$. Le signal $x(n)$ est-il stationnaire au second ordre ?
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(n)$

Exercice 3

On considère le signal $x(n) = A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n)$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance respective σ_A^2 et σ_B^2.

1. Calculer $\mathsf{E}[x(n)]$ puis $\mathsf{E}[x(n_1)x(n_2)]$. Le signal $x(n)$ est-il stationnaire au second ordre ? Justifier votre réponse.
2. On considère dans la suite $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$. Le signal $x(n)$ est-il stationnaire au second ordre ?
3. Calculer la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(n)$.
4. Quelle est la puissance de $x(n)$.
5. On considère le signal $y(n) = x(n) + w(n)$ où $w(n)$ est un bruit i.i.d., indépendant de A et de B, tel que $w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calculer la fonction d'autocorrélation $r_{yy}(n)$.
6. Calculer les rapport signal sur bruit de $y(n)$.

Exercice 4

On considère le signal $x(n)$ définit par :

$$x(n) = z(n) + \theta z(n-1),\ n \in \mathbb{Z}$$

où $z(n)$ est un bruit i.i.d. avec $z(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Quelle relation lie $z(n)$ à $x(n)$? Donner la réponse impulsionnelle du système correspondant.
2. Calculer la moyenne de $x(n)$.
3. Calculer la fonction d'autocorrelation de $x(n)$. Conclusion.

Exercice 5

Soit $x(n)$ un signal aléatoire stationnaire au sens faible. On définit

$$y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n + \varphi), \qquad z(n) = x(n)\cos(\omega_1 n + \varphi)$$

où φ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$.

1. Montrer que $y(n)$ et $z(n)$ sont stationnaires au sens faible.
2. Le signal $y(n) + z(n)$ est-t'il stationnaire ? et si $\omega_0 = \omega_1$?