M1 - Signaux aléatoires

TD 2

Rémi Flamary, André Ferrari

Exercice 1 Marche aléatoire

On considère le signal $X(k)$, $k \geq 0$:

$$X(k+1) = X(k) + U(k+1)$$

où les $U(k)$ sont des variables aléatoires iid prenant les valeurs S ou $-S$ avec la même probabilité. On considérera que $X(0) = 0$.

1. On considère la valeur de $X(n)$ et on suppose que sur les n valeurs de $U(k)$, $k = 1, \dots, n-1$ on a obtenu k fois S et donc $n-k$ fois $-S$. Que vaut $X(n)$? On note $m = 2k - n$.
2. Tracer une réalisation de $X(n)$ jusqu'à $n = 10$.
3. Montrer que $\forall m \in \{n, n-2, n-4, \dots, -n-2, -n\}$ on a :

$$P(X(n) = mS) = C_n^k \frac{1}{2^n},\ k = \frac{m+n}{2}$$

4. Donner l'expression de $X(n)$ en fonction de $U(1)$, ... , $U(n)$. Que vaut la moyenne de $X(n)$.
5. Calculer la variance de $X(n)$. Conclusion.
6. Calculer $\mathsf{E}[X(n)X(n+m)]$.

Exercice 2

On considère le signal $X(n)$ définit par :

$$X(n) = \phi X(n-1) + \theta Z(n),\ n \in \mathbb{Z}$$

où $Z(n)$ est iid avec $Z(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $Z(s)$ est indépendant de $X(n)$ pour $s > n$ (causalité).

1. Exprimer $X(n)$ en fonction de $X(0)$ et de $Z(k)$ avec $k \leq n$.
2. Calculer la moyenne de $X(n)$, $n > 0$ en fonction de $\mathsf{E}[X(0)]$. Montrer que si $|\phi| < 1$ cette moyenne tend vers 0. Justifier cette condition.
3. On supposera dans la suite que $X(n)$ est stationnaire au second ordre. Calculer la relation de récurrence vérifiée par la fonction d'autocorrelation de X_n. Pour cela on multiplie la relation de récurrence vérifiée par $X(n)$ par $X(n+q)$ pour $q > 0$ et on en calcule ensuite l'espérance.
4. Reprendre la question précédente pour $q = 0$. En déduire la valeur de l'autocorrélation de $X(n)$ en tout point et la tracer.
5. On considère le bruit iid $B(n)$, indépendant de $X(n)$, à moyenne nulle et de variance σ^2. Quelle est l'autocorrélation de $B(n)$ et de $Y(n) = X(n) + B(n)$?
6. Calculer le rapport signal sur bruit $\mathrm{R}_{S/B}$ et le rapport signal sur signal plus bruit $\mathrm{R}_{S/S+B}$ de $Y(n)$.