M1 - Signaux aléatoires

TD 4

Rémi Flamary, André Ferrari

Exercice 1

Soit $x(t)$ un signal stationnaire centré dont la densité spectrale de puissance est s pour $|f| < B$ et 0 sinon. Soit F_1 le filtre dont la réponse impulsionnelle est $1/T$ pour $|t| < T$ et 0 ailleurs et F_2 le filtre dont la réponse impulsionnelle est $1/2T$ pour $|t| < 2T$ et 0 ailleurs. Soit $y_1(t)$ et $y_2(t)$ la sortie de ces filtres lorsque l'entrée est $x(t)$.

1. Calculer la densité spectrale de puissance de $y_1(t)$ et de $y_2(t)$.
2. Calculer la densité spectrale de puissance de $y_1(t) + y_2(t)$.
3. Représenter ces spectres lorsque $BT = 1$.
4. Calculer la valeur de s telle que la puissance de $y_1(t) + y_2(t)$ soit égale à 1.

Exercice 2

On considère le signal $x(n) = A\cos(\omega n + \phi)$ où ϕ est une variables aléatoires uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$.

1. Justifier "physiquement" ce modèle. Calculer $\mathsf{E}[x(n)]$ puis $\mathsf{E}[x(k)x(l)]$. Le signal $x(n)$ est-il stationnaire au second ordre ?
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(q)$. Qu'elle est la puissance de $x(n)$. Tracer la densité spectrale de puissance de $x(n)$: $S_x(\omega)$.
3. On considère maintenant le signal $b(n)$ définit par la relation :
$$b(n) = z(n) + \theta z(n-1),\ n \in \mathbb{Z}$$
où $z(n)$ est un bruit indépendant, identiquement distribué avec $z(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
4. Calculer la moyenne de $b(n)$. Calculer la fonction d'autocorrelation de $b(n)$. Que vaut sa puissance ?
5. Calculer la densité spectrale de puissance de $b(n)$, $S_B(\omega)$ et tracer son allure.
6. On considère le signal $y(n) = x(n) + b(n)$. Calculer le rapport signal sur bruit P_X/P_B. Tracer l'allure de la densité spectrale de puissance de y : $S_Y(\omega)$.
7. On désire réduire l'effet du bruit $b(n)$ sur $x(n)$ en filtrant $Yy(n)$ par un filtre de fonction de transfert $H(z) = 1/(1 + \theta z^{-1})$.
   a) On considère le cas où s $y(n) = b(n)$. Donner l'expression de la DSP du signal en sortie du filtre et la représenter. Justifier ce choix de filtre.
   b) On considère maintenant le cas où $y(n) = x(n)$. Donner l'expression de la DSP du signal en sortie du filtre.
8. Calculer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre. Conclusion.

Exercice 3

Soit $x(t) = \cos(2\pi Ft + \theta)$ où F et θ sont deux variables aléatoires indépendantes. La densité de probabilité de F est $p(f)$ et sa fonction caractéristique $\Phi(u) = E[e^{2\pi jFu}] = \int e^{2\pi juf}p(f)df$. θ est une variables aléatoires uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$.

1. Calculer l'autocorrélation de $x(t)$, $r_x(t)$, et donner son expression en fonction de $\Phi(u)$.
2. En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance de $x(t)$ en fonction de $p(f)$.