# M1 - Signaux Aléatoires - TP1

*Rémi Flamary, André Ferrari*

— Pour faire ce TP il est absolument indispensable de connaître le cours sur les signaux aléatoires. Il est aussi nécessaire d'amener les notes de cours en TP.
— Le texte du TP contient entre crochets les fonctions spécifiques à utiliser.
— Les commandes matlab seront écrites à la suite les unes des autres dans des fichiers (1 par partie du TP). Au fur et à mesure les commandes de plot seront commentées (%).
— Le rapport de TP ne devra pas dépasser deux pages, ni contenir de code ou capture d'écran. Vous devez y discuter ce que vous avez appris les les difficultés associées à chaque section du TP.

## 1 Avant propos

La caractérisation des signaux aléatoires à partir de leurs moments d'ordre 1 et 2 a été étudiée en cours. Dans le cas pratique où l'on mesure des signaux, ces moments ne sont pas connus. L'étude pratique des signaux aléatoire repose alors sur la propriété d'ergodicité : il est possible d'obtenir les moments d'un signal à partir d'une de ces réalisations en remplaçant les moyennes d'ensemble (par exemple $E[x(n)]$ par une moyenne temporelle. Ainsi pour les deux premiers moments :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n = E[x_n] \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1+k}^{N} x_n x_{n-k} = E[x_n x_{n-k}] \text{ pour } k > 0 \tag{2}$$

Trois remarques sont nécessaires :

1. Les deux équations précédentes n'ont un sens que dans le cas d'un signal stationnaire.
2. Les $x_n$ étant des variables aléatoires, les limites des deux équations précédentes portent sur des quantités qui sont aléatoires. La notion de limite dans ce contexte sera précisée plus tard.
3. En pratique, on ne dispose pas d'un nombre infini de points. On se contentera d'enlever la limite, $N$ représentant le nombre de points disponibles. Les sommes ainsi obtenues sont clairement aléatoires. On dit que l'on obtient une estimation du moment. On a l'habitude de noter la valeur estimée d'un paramètre $a$ en mettant un chapeau : $\hat{a}$.

## 2 Bruit blanc échantillonné, notion d'estimation

1. Générer N=1024 échantillons d'un bruit blanc Gaussien échantillonné $b_n$ ayant une moyenne de zéro et une variance de 1.2 [`randn`].
2. Tracer l'histogramme du signal avec 30 classes [`hist`]. Renouveler plusieurs fois cette opération pour le même nombre de points. Renouveler plusieurs fois cette opération pour N=512 et N=2048 points. Conclusions.
3. Programmer l'estimation de la moyenne et de la variance de $b_n$ . Estimer plusieurs fois la moyenne et la variance. Renouveler cette opération en changeant N . Conclusions.
4. Programmer l'estimation de l'autocorrélation d'ordre $k$ de $b_n$ . Tracer les 20 premières autocorrélations. Conclusion.

## 3 Signal sinusoïdal bruité

1. Générer $N = 512$ points du signal $x_n = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$ où $\theta$ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$,$A = 1.2$ et $f_0 = 0.037$. Superposer sur la même figure les 100 premiers points de 20 réalisations du signal.
2. Calculer l'expression théorique de l'autocorrélation de $x_n$ .
3. Tracer les 40 premières autocorrélations estimées de $x_n$ , [`xcorr`]. Comparer les autocorrélations estimées avec les autocorrélations théoriques. Pour cela superposer les deux sur une même figure.
4. On considère le signal $y_n = x_n + b_n$ où xn est la sinusoïde précédente et $b_n$ le bruit définit plus haut. Tracer $y_n$ . Quel est le rapport signal sur bruit ?
5. Calculer l'expression théorique de l'autocorrélation de $y_n$ . Superposer dans une figure les 256 premières autocorrélations théoriques et les 256 premières autocorrélations estimées. Expliquer ce résultat.
6. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance de $x_n$ , $S_{xx}(f)$ en fonction de ces autocorrélations. Une façon d'estimer la densité spectrale de puissance consiste à remplacer dans cette expression les autocorrélations théoriques $R_{yy}(n)$ par les L premières $\hat{R}_{yy}(n)$. Donner l'expression de $\hat{S}_{yy}(f)$. Outre l'erreur issue de l'estimation des autocorrélations une erreur provient du fait que l'on a tronqué la somme infinie. Afin de remédier à ce problème on utilise la même solution que celle utilisée pour la synthèse de filtre par la méthode des fenêtres : on pondère les autocorrélations par une fenêtre $w_n$ . Donner l'expression de $\hat{S}_{yy}(\omega)$ obtenue de cette façon. On appelle cet estimateur de la densité spectrale de puissance le corrélogramme.
7. Tracer le corrélogramme de $y_n$ pour différents paramètres (L et type de fenêtre) [`cpsd`]. L'axe des abscisses sera gradué pour $f \in [0, 1/2]$. Commenter les résultats.

## 4 Autres signaux aléatoires

Pour les signaux aléatoires stationnaires vus en TD :

1. Générer une réalisation du signal aléatoire.
2. Tracer l'estimation de l'autocorrélation ainsi que l'autocorrélation théorique. Les comparer.
3. Tracer leur densité spectrale de puissance théorique et estimée sur un nombre fini de points.

## Références