TP : Discrimination linéaire

1 Chargement des données et pré-traitement

— Télécharger le fichier "digits.mat".
— Charger ce fichier sous matlab en utilisant la fonction *load*. Le fichier contient les matrices suivantes :
  - **x** et **xt** : matrices de données contenant respectivement $n = 3000$ et $nt = 1500$ exemples d'images manuscrites. Chaque ligne de ces matrices correspond à une image stockée sous la forme d'un vecteur transposé.
  - **y** et **yt** : étiquettes des images décrites dans les matrices précédentes. Ce sont des vecteurs qui contiennent la classe $(1, 7, 8)$ de chaque image de **x** et **xt**.

— Utiliser la fonction `reshape` pour extraire quelques images de taille 28×28 pour chaque classe. Les visualiser avec la fonction `imagesc`.
— Centrer et normaliser les données d'apprentissage **x** et de test **xt**. Faire attention aux variables ayant un écart type nul.

2 Discrimination binaire par moindre carré

— Créer un problème de classification binaire à partir des trois classes. Vous pourrez par exemple choisir de classifier la classe 8 contre 1 et 7. Stocker les étiquettes binaires $(-1, 1)$ dans les vecteurs **yb** et **ytb**.
— Estimer un classifieur à l'aide de la régression ridge.
— Comment prédire la classe binaire à partir de la prédiction continue ?
— Calculer le taux de bonne reconnaissance.
— Quel effet a la régularisation sur les performances sur les données d'apprentissage et de test ?
— Visualiser quelques exemples mal classés sous la forme d'image, conclusions.
— Visualiser le classifieur $\mathbf{w}$ sous la forme d'une image, interpréter.

— Refaire les étapes précédentes pour la détection de 1 contre 7 et 8 et 7 contre 1 et 8. Quelles sont les différences de performance ? À quoi sont-elles dues ?

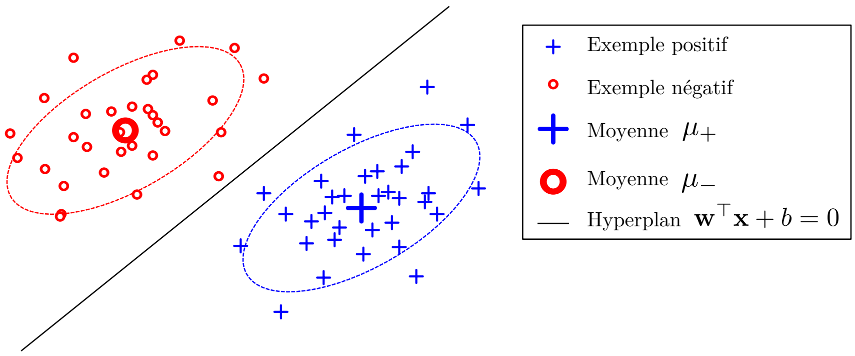
3 Régression logistique

— Coder l'algorithme de descente de gradient pour la régression logistique régularisée.
— Faire varier les paramètre de l'algorithme d'optimisation pour en voir l'impact sur l'évolution du coût.
— Comparer les performances de classification (taux de bonne classification) entre les 3 méthodes de classification (Bayésienne gaussienne, moindre carrés et régression logistique).
— Calculer le nombre de paramètres nécessaire à estimer pour chaque méthode. En déduire quelles sont les méthodes les moins sensibles au sur-apprentissage.

4 Discrimination multiclasse

— Pour effectuer une discrimination multiclasse, une approche commune est de faire ce qui s'appelle du « un contre tous ».
— Pour cela on estime 1 classifieur binaire par classe en prenant tous les exemples des autres classes comme étant négatifs (voir section précédente).
— Les scores de prédiction pour chaque classe sont calculés pour chaque exemple.
— La prédiction finale consiste à choisir la classe qui a le score le plus important.
— Utiliser la méthode « un contre tous » sur les données d'apprentissage et de test.
— Calculer les performances et discuter les résultats.

5 Bonus : LDA binaire



L'Analyse Linéaire Discriminante (ou Linear Discriminant Analysis en anglais) est une méthode simple de discrimination basée sur une modélisation probabiliste des données. On veut classifier des exemples (vecteurs) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ qui peuvent appartenir à la classe positive $+$ ou à la classe négative $-$ (discrimination binaire). On suppose pour cela que les exemples sont des réalisations de lois normales multidimensionnelles $\mathcal{N}(\mu_+, \Sigma)$ pour la classe positive de probabilité p_+ et $\mathcal{N}(\mu_-, \Sigma)$ pour la classe négative de probabilité p_- telle que $p_+ + p_- = 1$.

En calculant la vraisemblance pour un exemple $\mathbf{x}$ pour chaque classe $\{-1, 1\}$ on se rend compte que la prédiction de la classe peut être faite en prenant le signe d'une fonction linéaire de la forme

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{w} + b \tag{1}$$

avec $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ et b les coefficients du classifieur de valeur

$$\mathbf{w} = \Sigma^{-1}(\mu_+ - \mu_-) \tag{2}$$

$$b = -\mathbf{w}^t(\mu_+ + \mu_-)/2 + \log(p_+) - \log(p_-) \tag{3}$$

Une variante de la LDA visant à promouvoir une meilleure robustesse consiste à remplacer l'inverse de la matrice de covariance Σ^{-1} par l'inverse $(\Sigma + \lambda \mathbf{I})^{-1}$ où λ est un paramètre de régularisation qui assure que la matrice est inversible et $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Cette méthode appelée LDA régularisée est préférée lorsque le nombre d'exemples d'apprentissage est limité ou lorsque le nombre de variables est important ($d > n$).

— Comparer le classifier LDA à celui des moindres carré et de la régression logistique